MATHEMATIQUES Durée : 3 heures

FILIERE PSI

Problème 1 :

Dans tout le problème :

- On désigne par I l'intervalle réel $[-1;1]$ et par $\mathbf{C}(I)$ l'espace des fonctions réelles continues par morceaux sur l'intervalle I. On note $\mathbf{P}_n$ l'espace vectoriel réel des polynômes (à une indéterminée et à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n $(n \in N)$, dont la base canonique est $B = (1, X, X^2, \ldots X^n)$.

- On note $f^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$ la k-ième dérivée d'une fonction f avec la convention usuelle $\dfrac{d^0 f}{dx^0} = f$.

- On considère, pour $n \in N$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \text{ et } P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n U_n}{dx^n}(x)$$

et on convient que $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

- A toute fonction f de classe C^2 sur I, on associe la fonction $L(f)$ définie sur I par :

$$L(f) = \frac{d}{dx}\left((x^2 - 1)\frac{df}{dx}\right).$$

Partie A :

1°) Soit L_n l'endomorphisme de $\mathbf{P}_n$ défini pour tout polynôme P de $\mathbf{P}_n$ par $L_n(P) = L(P)$.

a) Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^p)$ pour $p = 2,3,..,n$ et $n \geq 2$.

b) En déduire la matrice M_n de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbf{P}_n$

c) Déterminer les valeurs propres de M_n et en déduire que M_n est diagonalisable.

2°) En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\dfrac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^n (x+1)^n\right)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

3°) Calculer directement P_1, P_2, P_3.

4°) **a)** Vérifier les relations :

(1) : $U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0$

(2) : $(x^2 - 1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0$

b) En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

(3) : $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$

(4) : $L(P_n) = n(n+1)P_n$

5°) Montrer que, pour $n \geq 1$, P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

6°) Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ forment une base de $\mathbf{P}_n$

Partie B :

Pour f et g appartenant à $\mathbf{C}(I)$, on pose $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ et $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, ce qui définit sur l'espace $\mathbf{C}(I)$ un produit scalaire et la norme associée.

1°) Montrer que, pour m et n entiers naturels : $(L(P_n), P_m) = (P_n, L(P_m))$. En déduire que, si $m \neq n$, on a : $(P_n, P_m) = 0$.

2°) **a)** En utilisant le résultat du 1°), montrer que :

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x)P_n(x)dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$$

(en convenant que $a_0 = 1$)

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\right)^2 dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)dx$$

c) En utilisant la relation (3) de **A.4°)b)** et les résultats du **a)** et **b)** ci-dessus, montrer que :

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

d) On pose $\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ pour $n \in N$. Déduire du c) que $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$ est une base orthonormale de $\mathbf{P}_n$

3°) Pour $f \in \mathbf{C}(I)$ et $n \in N$, on pose $c_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\tilde{P}_n(x)dx$, et on note $d_n(f)$ la distance de f à $\mathbf{P}_n$ définie par $d_n(f) = \inf\{ \|f - P\|, P \in \mathbf{P}_n \}$.

a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k$ un élément de $\mathbf{P}_n$ et $f \in \mathbf{C}(I)$. Montrer que :

$$\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \left(c_k(f)\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_k - c_k(f)\right)^2$$

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbf{P}_n$ tel que : $\|f - Q\| = d_n(f)$ et que

$$\left(d_n(f)\right)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \left(c_k(f)\right)^2$$

c) En conclure que $\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$.

Problème 2 :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et M_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La matrice-unité de M_n est notée I_n.
Pour $M \in M_n$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M et $r(M)$ le plus grand des réels $|\lambda_i|$, où λ_i est valeur propre de M.
Par ailleurs, S_n désigne l'ensemble des matrices symétriques de M_n et on rappelle qu'une matrice de S_n admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ distinctes ou confondues.
Dans les parties B et C du problème, $(.,.)$ et $\|..\|$ désignent respectivement le produit scalaire canonique et la norme euclidienne dans l'espace R^n.

Partie A :

Soit $C_n = [c_{ij}] \in M_n$ la matrice définie par : $c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ pour i et j dans $\{1,2,\ldots,n\}$, c'est-à-dire :

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note P_n la fonction polynôme définie pour $\lambda \in R$ par :

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - C_n)$$

1°) Donner directement l'expression de $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda)$.

2°) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel λ : $P_{n+2}(\lambda) = \lambda P_{n+1}(\lambda) - P_n(\lambda)$

3°) **a)** Soit θ un réel fixé de l'intervalle $]0;\pi[$. Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

b) En déduire les valeurs propres de la matrice C_n

4°) On considère maintenant la matrice $A_n = [a_{ij}] \in M_n$ définie par $\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{ij} = -1 \text{ si } |i-j| = 1 \text{ pour } i \text{ et} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ j dans $\{1,2,\ldots,n\}$, c'est-à-dire :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) A l'aide du résultat du 3°)b), déterminer les valeurs propres de la matrice A_n

b) Justifier que la matrice A_n est inversible.

c) Etablir que $r(A_n) = 4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)$

Partie B :

Soit $B \in S_n$ et $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de la matrice B.
On rappelle qu'il existe une matrice orthogonale $P \in M_n$ (c'est-à-dire vérifiant $P\,{}^tP = I_n$) telle que $B = P\Delta\,{}^tP$ où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$.

1°) Montrer que pour tout élément x de R^n :

$$(Bx, x) \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$$

2°) En déduire que pour tout $x \in R^n$:

$$\|Bx\| \leq r(B)\|x\|$$

Partie C :

Soit b un élément fixé de R^n. Dans cette partie, on étudie un algorithme d'approximation de l'unique vecteur $x^* \in R^n$ vérifiant $A_n x^* = b$, où A_n est la matrice définie en A.4°).

Dans ce but, on introduit l'application $\Phi : R^n \to R^n$ définie par $\Phi(x) = Mx + \frac{1}{2}b$, où M désigne la matrice $M = I_n - \frac{1}{2}A_n$, et $\left(x^{(p)}\right)_{p \in N}$ la suite de vecteurs de R^n définie par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ arbitraire dans } R^n \\ x^{(p+1)} = \Phi\left(x^{(p)}\right) \text{ pour tout entier naturel } p \end{cases}$$

1°) Vérifier que x^* est l'unique vecteur $y \in R^n$ vérifiant $\Phi(y) = y$.

2°) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel p :

$$x^{(p+1)} - x^* = M\left(x^{(p)} - x^*\right)$$

b) En déduire (en utilisant le résultat de la question B.2°)) que : $(\forall p \in N)$

$$\left\|x^{(p)} - x^*\right\| \leq (r(M))^p \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$$

3°) **a)** Montrer que $r(M) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$

b) En déduire que la suite $\left(x^{(p)}\right)_{p \in N}$ converge vers x^*.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail